CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA, EXPERIENCIA DE AULA

Barrile, Sandra Leonor; Boutet, Stella Maris; Righetti, Gabriela
sandrabarrile@hotmail.com; stellaboutet@gmail.com; gabrighetti@hotmail.com
Facultad Regional Avellaneda. Universidad tecnológica Nacional. Argentina

Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario – Universitario
Tema: Materiales y Recursos Didácticos para la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática.
Palabras claves: Áreas, Sumas superiores e inferiores; Integral definida.

Resumen

Teniendo en cuenta el objetivo general de la búsqueda de estrategias que fomenten el aprendizaje significativo, en particular, en el cálculo diferencial e integral, surge la posibilidad de realizar distintas secuencias que permitan la aproximación a los conceptos y definiciones a partir de sus interpretaciones geométricas. La etapa exploratoria y la "visualización" a partir de cuestiones geométricas, permite una imagen global de las relaciones que favorece la definición de los distintos conceptos. En este trabajo proponemos una experiencia de aula que permite la construcción del concepto de integral definida, a partir del cálculo de áreas de distintas regiones. En una primera etapa, de la experiencia, se plantean estas cuestiones a partir de aproximaciones utilizando áreas de rectángulos y trapecios y también el hecho de dividir la región en varias partes para obtener una mejor aproximación. Lo que permite en una segunda etapa la introducción de la definición de sumas parciales y apoyados en la propuesta de "paso al límite" para mejorar la aproximación, construir el concepto de integral definida, aportando significatividad a estos contenidos. Finalmente, a partir de la discusión de los resultados obtenidos en cada una de las actividades, se pudieron introducir las distintas propiedades de las integrales definidas.

1. Introducción

Los alumnos de ingeniería deben poder resolver problemas de la profesión. Para conseguirlo, es necesario que puedan interpretar y construir modelos. Es por ello que las universidades incluyen entre sus objetivos y las competencias a alcanzar el uso de la matemática para modelizar situaciones problemáticas. Muchas veces, esto ocurre recién en el ciclo superior, ya que en las materias básicas se pone énfasis en la fundamentación teórica. Sin embargo, es posible trabajar con ciertos conceptos a partir de un modelo, utilizando sus interpretaciones, sin pérdida de desarrollo teórico.

Según las teorías de Ausubel, Novak y Gowin, el alumno debe ser un sujeto activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. De ahí la necesidad de proponer actividades que favorezcan un aprendizaje significativo, construyendo los distintos conceptos a partir de sus interpretaciones geométricas, físicas, etc. En tal sentido, hay que "pensar la clase como un ámbito matemático en el que se despliega la actividad matemática requiere además pensar condiciones para que los alumnos se vean confrontados a formular conjeturas, ensayar formas de validarlas, producir argumentos deductivos, arriesgar respuestas para las cuestiones que se plantean, producir formas de representación que contribuyan a arribar a las resoluciones que se buscan, reformular y reorganizar los viejos conocimientos a la luz de los nuevos que se producen, generalizar las herramientas que van emergiendo y también encontrar sus límites" (Sadovsky, 2005, pág. 58). Tall (1991) plantea que la etapa exploratoria en el pensamiento matemático permite construir, a partir de la visualización, distintas relaciones. Visualmente, al tener una partición puntos, se "ve" que la suma de las áreas de los rectángulos se parece al valor del área bajo la curva.

2. Características del material propuesto

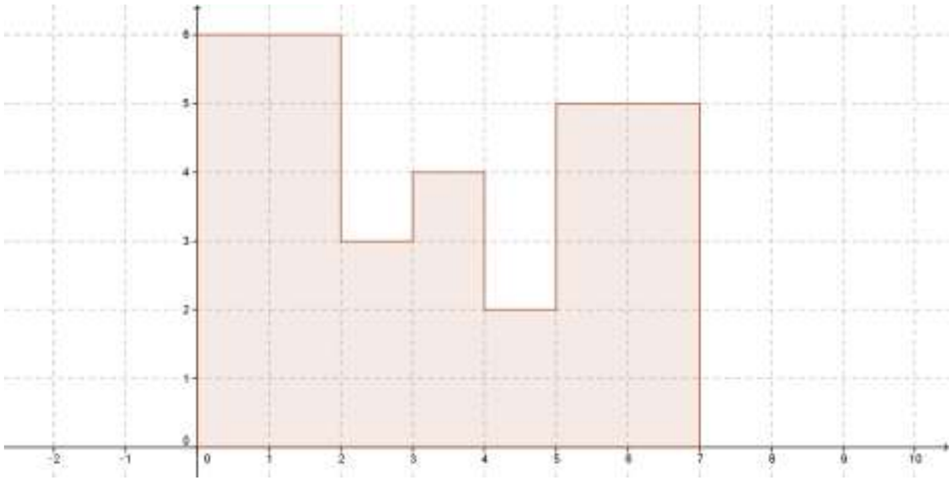
La propuesta consiste en una serie de actividades que los alumnos deberán realizar en pequeños grupos, en los que los conceptos de suma superior e inferior, el de integral definida y los teoremas del valor medio y fundamental del cálculo integral, van apareciendo gradualmente planteando problemas sencillos y adecuados para un primer año de una carrera de Ingeniería o último año de la escuela media. Estas actividades tienen una fuerte vinculación con la interpretación geométrica del concepto de integral definida. En ellas se trabaja , entre otras cosas, la aproximación del área de una región mediante el cálculo de áreas conocidas, la igualdad entre el área de una región y la de un rectángulo determinado, y el cálculo de áreas determinadas por funciones no negativas y el eje x relacionando la fórmula de la función con su derivada.

3. Ejemplos de ejercicios y actividades: desarrollo de la propuesta

Actividad 1:

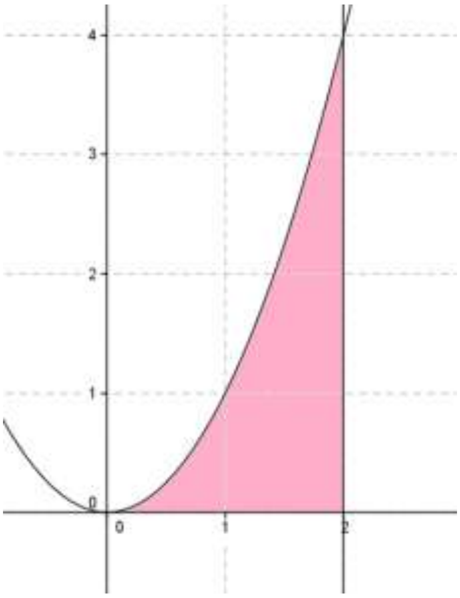
a) Realizar el gráfico de $g(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x \le 1 \\ 3 & si \quad x > 1 \end{cases}$ en el intervalo [0,2] y calcular el área determinada por el gráfico de dicha función en ese intervalo y el eje x.

b) Calcular el área de la siguiente figura:



Actividad 2

Se busca calcular el área de la región limitada por el gráfico de f(x)=x^2, el eje x, x=0, x=2 tal como se muestra en la figura:



a) ¿Entre qué valores consideran que se encuentra el área de la región sombreada?

b) Consideren rectángulos inscriptos en la región sombreada y calculen el área total de dichos rectángulos.

c) Consideren rectángulos circunscriptos en la región sombreada y calculen el área total de dichos rectángulos.

Actividad 3

Para f: $[1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ /f(x)=x, consideren el área que forma el gráfico de la función con el eje x

a) Calcular las sumas superiores e inferiores para n=5 y $n \in \mathbb{N}$, considerando todas las bases de los rectángulos de igual medida.

b) Determinar el área de la región utilizando fórmulas de áreas de regiones conocidas

c) Determinar el límite de las sumas superiores e inferiores para $n \to +\infty$

Actividad 4

Para f: [-1,1] $\to \mathbb{R}$ /f(x)=x, consideren el área que forma el gráfico de la función con el eje x

a) Calcular las sumas superiores e inferiores para n=5 y $n \in \mathbb{N}$, considerando todas las bases de los rectángulos de igual medida.

b) Determinar el área de la región utilizando fórmulas de áreas de regiones conocidas

c) Determinar el límite de las sumas superiores e inferiores para $n \to +\infty$.

Actividad 5

a) ¿Qué modificación se puede realizar en la definición de sumas superior e inferior para que pueda aplicarse en el caso que la función sea acotada en un intervalo pero no continua?

b) ¿Pueden definirse las sumas superior e inferior en el caso que la función sea no acotada en un intervalo?

Actividad 6

Hallen las sumas superiores e inferiores para $f(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 \ \ si \ \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, para n=5 y para $n \in \mathbb{N}$, en el intervalo [0,1]

Actividad 7

Para la función de la actividad 3, ¿es posible encontrar un rectángulo de base [1,2] y cuya área sea igual al área de la región determinada en la actividad 3? ¿Cuál sería la altura de dicho rectángulo? ¿Se puede obtener el valor de la altura como imagen de un valor de f en [1,2]?

Actividad 8

Para la función de la actividad 2 y sabiendo que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

a) Determinen una fórmula para las sumas superiores para $n \in \mathbb{N}$

b) Calculen el área de la región

c) Encuentren, si es posible un rectángulo cuya base sea el intervalo [0,2] y que tenga igual área que la calculada en b). ¿Se puede obtener el valor de la altura como imagen de un valor de f en [0,2]?

Actividad 9

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\,/\,f(x)=2x+3$, definan una función $F:[0,3]\rightarrow\mathbb{R}$ que verifique que *F(x)* sea el valor del área del trapecio que tenga por base el segmento de extremos (0,0) y (x,0). ¿Es F una función continua? ¿Es F una función derivable? Definan, donde sea posible, F'(x).

Actividad 10:

a) Definan una función derivable en (0,2) tal que su derivada sea $f(x)=x^2$. ¿Es única?

b) Encuentren la fórmula de una función F: $[0,2]\rightarrow\mathbb{R}$ que represente el área limitada por: $f(x) = x^2$ y el eje x, en el intervalo [0,x]

c) ¿Cuánto vale F(0)?

d) Calculen F(2) y comparen el resultado con el valor obtenido en la Actividad 2

4. Etapas de discusión y formalización de los conceptos

Resulta fundamental en este tipo de actividades la realización de puestas en común y las intervenciones docentes que permitan "dar nombre", formalizar e institucionalizar los distintos conceptos trabajados. Estas instancias es conveniente realizarlas al finalizar:

- Actividad 2: discusión de las distintas medidas de los rectángulos que consideraron los grupos, los distintos valores obtenidos en las aproximaciones, y apoyados en la producción de los alumnos definir los conceptos de suma superior y suma inferior;
- Actividad 4: construcción del concepto de integral definida y su interpretación geométrica en el caso de funciones no negativas;
- Actividad 6: discusión de las condiciones que debe cumplir una función para que sea integrable;
- Actividad 8: enunciado del teorema del valor medio del cálculo integral;
- Actividad 9: análisis de la relación entre f y F' para calcular una integral, enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo;
- Actividad 10: discusión sobre cómo se calcula una integral definida conociendo la función F, definición de primitiva, enunciado de la regla de Barrow

5. Reflexiones finales

Con el objetivo de que los alumnos puedan visualizar el concepto de integral definida, se propusieron esta serie de ejercicios sencillos, mediante los cuales pueden aproximar el área de una región usando sumas finitas y obtener el valor real al "pasar" al límite. Este tipo de actividades, pretende presentar de una manera sencilla cómo abordar el cálculo de áreas sencillas, introduciéndonos a partir de ello al concepto de integral definida para funciones acotadas positivas y no positivas, y a los teoremas del valor medio y el del cálculo integral, como una estrategia para presentar el tema a partir de conocimientos adquiridos anteriormente.

Las actividades deben continuar con el objetivo de descontextualizar y resignificar el concepto de integral definida y aplicarlo a otros problemas (cálculo de desplazamientos, longitudes de arcos de curvas, etc).

6. Bibliografía

Ausubel, D.P.; Novak, J.D.; Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Editorial Trillas.

Biembengut, M.S.; Hein, N. (2004) "Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática". *Educación Matemática*, vol. 16, núm. 2, agosto de 2004, pp. 105-125. México: Santillana.

Noriega, Ricardo (1979). *Cálculo diferencial e integral*. Buenos Aires: Editorial Docencia.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy*. Buenos Aires, Argentina.Libros del Zorzal.

Stewart, James (2006). *Cálculo*. México: Editorial Thomson.

Spivak, Michael (1992). *Cálculo infinitesimal*. España: Editorial Reverté.

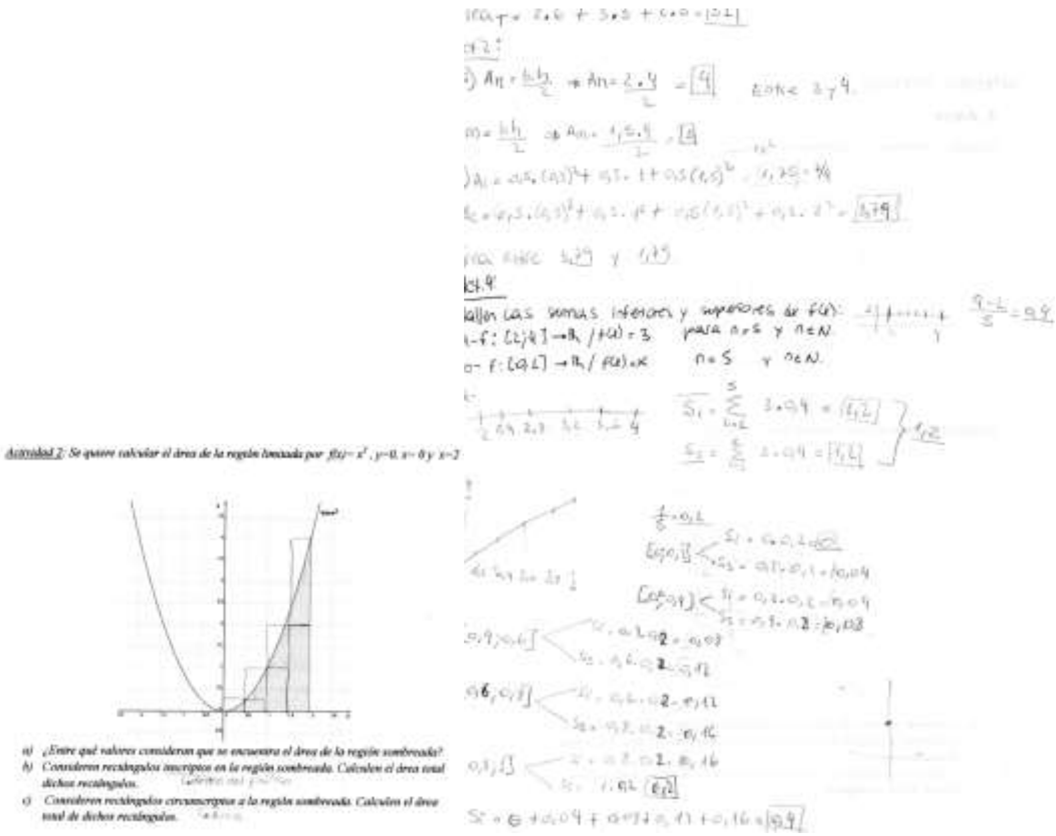
Tall, D. (1991). *Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus.* (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. **19**, 105– 119 http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html

Consultado13/3/2013

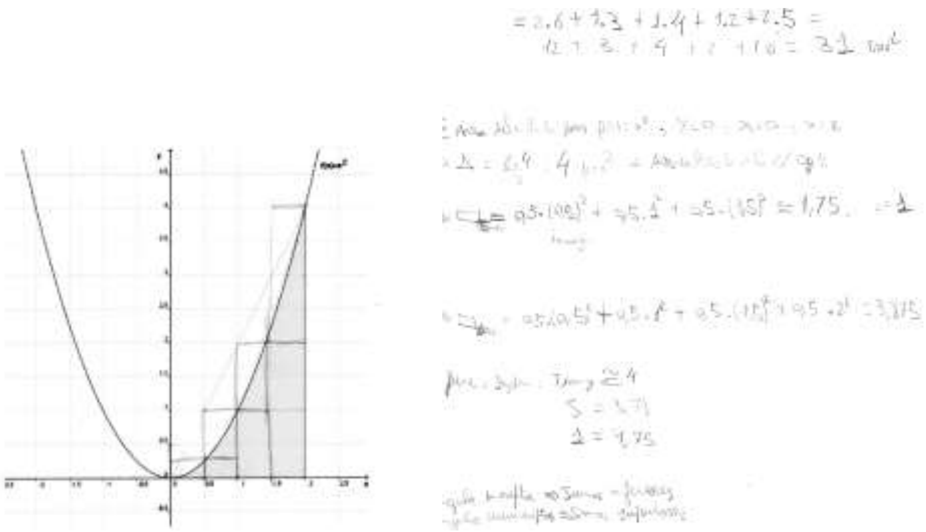
Anexo:

Actividades realizadas por los alumnos de dos cursos : Angelina Lancha; Gonzalo Abal Bernal, Bárbara Pérez, Carla Valenti, Cristian Dnitruck

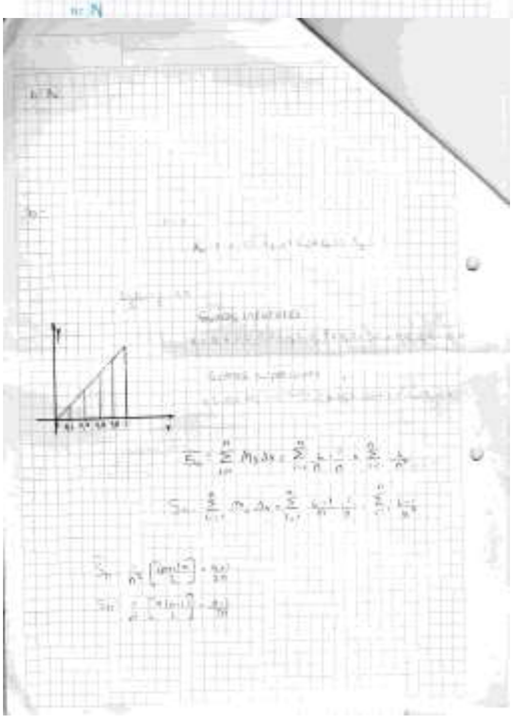
Alumno 1



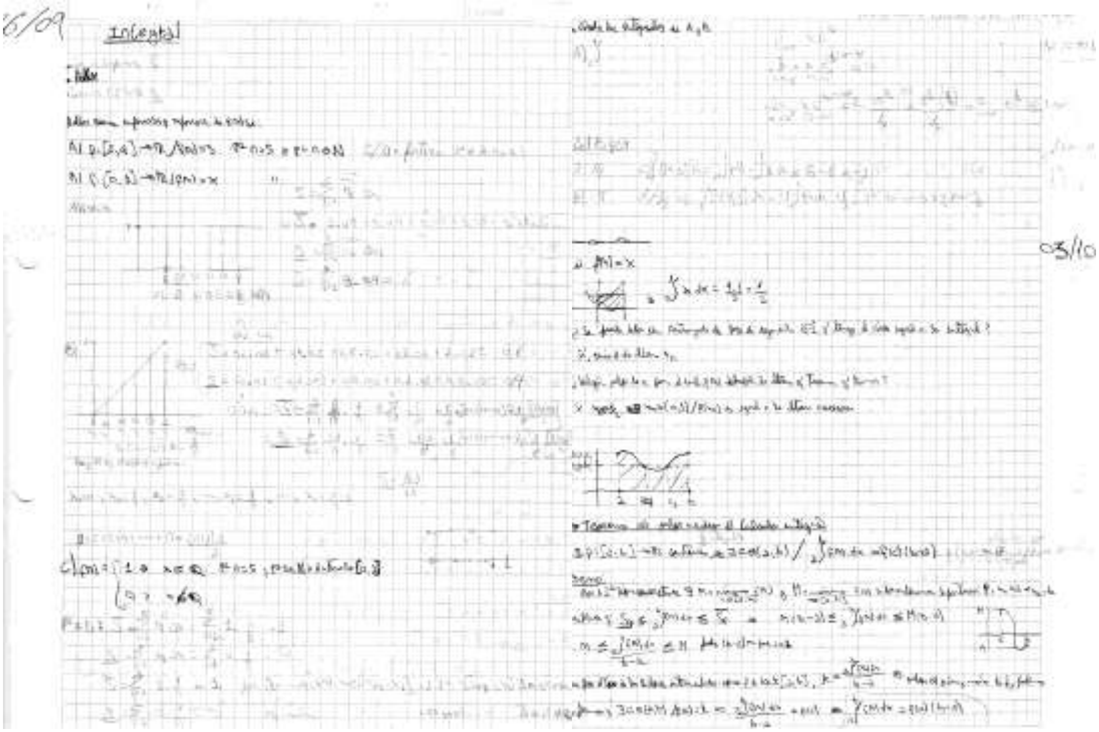
Alumno 2

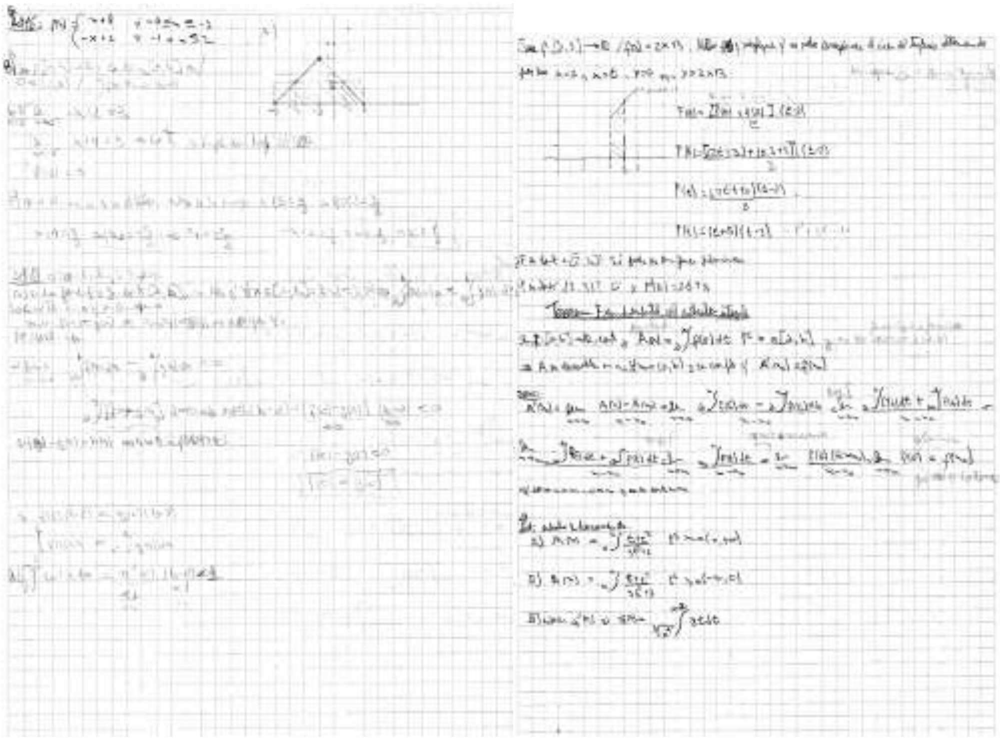


Alumno 3



Alumno 4





Alumno 5